Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
8 марта 2025 г.
9 класс

1. Василий, стоя возле дерева, подкидывал грецкий орех массой $\boldsymbol{m}$ вертикально вверх со скоростью $\boldsymbol{v}$. В какой-то момент, хитрая белка массы $\boldsymbol{M}$, сидящая на том же дереве на высоте $\boldsymbol{H}$, решила украсть орех. Как только белка и орех поравнялись, она тут же горизонтально оттолкнулась от дерева со скоростью $\boldsymbol{u}$ и схватила орех. На каком расстоянии от дерева приземлится белка с орехом?

Возможное решение

Запишем уравнение движения $H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Отсюда найдем скорость, с которой движется орех

$$v_y = v_0 - gt$$

Из 1 уравнения найдем время полета и скорость движения

$t_{12} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$ $v_y = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gH}$ Знак ± объясняется тем, что белка может поймать орех в двух случаях: Когда он летит вверх или, когда он летит вниз.

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси X,Y

$$mv = (m + M)V_y$$
$$Mu = (m + M)V_x$$

Отсюда найдем скорости V_x и V_y

Еще раз запишем уравнение движения и длину полета тела

$$0 = -H \pm v_y \tau + \frac{g\tau^2}{2}$$
$$L = V_x \tau$$

Где τ время полета системы "белка − орех".

Найдем время полета системы $\tau_{12} = \frac{\mp V_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gH}}{g}$ Проанализируем знаки. Время не можем быть отрицательным, значит сочетание знаков “+,-“ и “- -“ нам не подходят.

Подставим время и получим окончательный ответ

$$L = \frac{Mu}{(m + M)g} (\pm V_y + \sqrt{{V_y}^2 + 2gH})$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Записано уравнение движения и найдена скорость ореха	$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ $v_y = v_0 - gt$	1 балл
Найдено время движения и скорость ореха	$t_{12} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$ $v_y = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gH}$	1 балл
Обьяснен знак $\pm$ в определении скорости		1 балл
Записан закон сохранения импульса	$mv = (m+M)V_y$ $Mu = (m+M)V_x$	1 балл
Выражены скорости белки и ореха	V_x и V_y	2 балла
Найдено время полета системы	$\tau_{12} = \frac{\mp V_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gH}}{g}$	1 балл
Произведен анализ знаков		1 балл
Записан правильный ответ с указанием двух случаев	$L = \frac{Mu}{(m+M)g}(\pm V_y + \sqrt{{V_y}^2 + 2gH})$	2 балла

2. Как известно, наши предки были сильнее многих натренированных спортсменов. Допустим, что ими было придумано примитивное охотничье орудие – кокос, надетый на палку. Взмахом руки, кокос разгонялся, соскальзывал с конца палки и поражал цель. Оцените дальность метания кокоса, если предположить, что мощность мышц рук данного представителя могла равняться 2 кВт. Полагается, что все необходимые данные могут быть оценены и введены самостоятельно.

Возможное решение

Из ЗСЭ

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{8} = Pt$$

Где M = 1кг – масса кокоса, m = 100г – масса палки. Скорость центра масс палки оцевидно в 2 раза меньше приобретенной скорости кокоса. Время оценим как t = 0.1 с, считая, что из горизонтального положения необходимо пройти восьмую часть окружности.

Отсюда легко ищется оценка для скорости. $v^2 = 400\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$

Далее, известно, что самый дальний бросок осуществляется под углом 45 градусов.

Запишем уравнения движения

$$L = v_x t$$

$$0 = H + v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

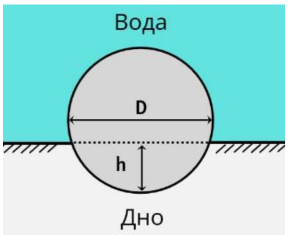
(высота “предка” может быть исключена из рассмотрения)

Итого, решив эту систему, исключив малые величины и подставив оценку скорости получим:

$$L = \frac{v^2}{2g}(1 + \sqrt{1 + \frac{4gH}{v^2}}) = 40 \text{ м}$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
ЗСЭ	$\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{8} = Pt$	2 балла
Условие максимальной дальности		1 балл
Уравнения движения	$L = v_x t$ $0 = H + v_y t - \frac{gt^2}{2}$	3 балла
Разумные оценки величин		2 балла
Ответ	$L = \frac{v^2}{2g}(1 + \sqrt{1 + \frac{4gH}{v^2}}) = 40 \text{ м}$	2 балла

3. Кощей разочаровался в яйце, утке и зайце и решил перепрятать свою иглу. Он поместил иглу в шар для боулинга с радиусом $\boldsymbol{R}$ = 11 см, а шар спрятал на самом дне Байкала. Чтобы шар не катался по дну, Кощей сделал идеально походящую для него выемку глубины $\boldsymbol{h}$ = 5 см, и поместил шар в эту выемку вплотную (см. рис.).



1) Найдите силу, которая нужно приложить, чтобы оторвать шар от дна.

2) Найдите минимальную работу, которую нужно совершить, чтобы достать иглу Кощея со дна.

Масса шара вместе с иглой $\boldsymbol{m}$ = 7 кг. Наибольшая глубина Байкала $\boldsymbol{H}$ = 1642 м. Считайте $\boldsymbol{g}$ = 10 м/с^2. ***Подсказка***: Объём шарового сегмента V = $\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

Возможное решение

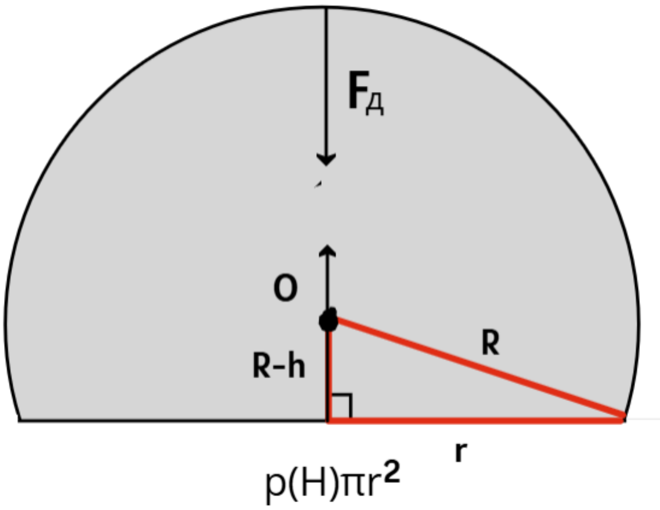
1) Шар вложен в лунку вплотную — подтекания нет. Сила на отрыв:

$$F = F_д + mg$$

где $F_д$ — сила давления воды на поверхность шара вне лунки.

Найдём силу Архимеда, которая бы действовала на усечённый шар (см. рис.), как разницу сил давления на верхнюю и нижнюю поверхности:

$$F_a = \rho g\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\right) = \rho g H \pi r^2 - F_д$$



По т. Пифагора:

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 .$$

Откуда:

$$F_д = \rho g\pi\,(H(2Rh - h^2) - 4R^3/3 + h^2(3R - h)/3) .$$

Тогда

$$F = mg + \rho g\pi\,(H(2Rh - h^2) - 4R^3/3 + h^2(3R - h)/3) = 4.38\cdot10^5\ Н.$$

2) Примем уровень дна за нулевую высоту и запишем закон сохранения энергии:

$$A + mg(R - h) + m_в gH = mg(R + H) + m_в g(R - h),$$

где $m_в$ — масса вытесненного шаром объёма воды, который при подъёме шара опускается с поверхности на дно.

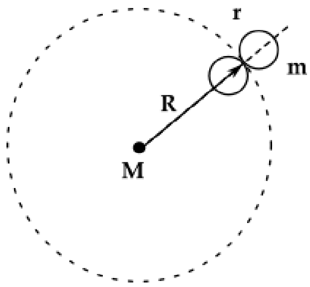
$$m_в = 4\rho\pi R^3/3 .$$

Тогда

$$A = g(H + h - R)\,(m - 4\rho\pi R^3/3) = 2.34\cdot10^4\ Дж.$$

Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Уравнение	$F = F_{д} + mg$	1 балл
Идея рассмотреть усечённый шар		1 балл
Верное уравнение для F_a		1 балл
Ответ		2 балла
Верно записанный З.С.Э.		3 балла
Ответ		2 балла

4. Спутник планеты можно представить, как два одинаковых шара, имеющих радиус ***r*** и массу ***m***. Эти шары касаются друг друга в некоторой точке. Центры масс шаров ориентированы в каждый момент радиально по направлению на центр масс планеты. Пусть такой спутник вращается вокруг планеты массы ***M*** по круговой орбите на расстоянии ***R*** много большем чем радиус каждого шара в составе спутника (***R***>>***r***). Найти минимальное расстояние, при котором система развалится.



Примечание: $(1+x)^n \approx 1+nx$, для любого n, при x<<1.

Возможное решение:

Так как мы движемся по круговой орбите найдем круговую частоту для центра масс спутника:

$$F = \frac{2GmM}{R^2} = 2mw^2R$$

$$w^2 = \frac{GM}{R^3}$$

Так как спутник движется по круговой орбите, то для его центра масс выполняется равенство между силой гравитационного притяжения и произведением центростремительного ускорения на массу спутника. Для центров масс шаров, которыми моделируется спутник, это равенство не выполняется, так как расстояние до них R+r и R-r соответственно, и у шаров появляется эффективное радиальное ускорение, направленное по прямой между центром масс планеты и центром масс шара.

$$a(d) = w^2d - \frac{GM}{d^2}$$

Рассмотрим это ускорение на расстоянии R+x (x<<R), от центра масс планеты.

$$a(R+x) = \frac{GM}{R^3}(R+x) - \frac{GM}{(R+x)^2} = \frac{GM}{R^3}(R+x) - \frac{GM}{R^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^2} \approx \frac{GM}{R^3}R + \frac{GM}{R^3}x - \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2x}{R}\right)$$

$$= \frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{R^2} + \frac{3GM}{R^3}x = \frac{3GM}{R^3}x$$

Тогда для шаров получаем что дополнительная сила, действующая на шар равна:

$$F_a(R \pm r) = \pm\frac{3GMm}{R^3}r$$

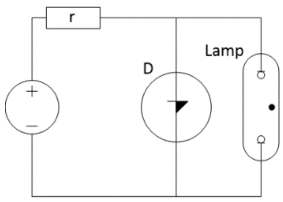
Если эта сила станет больше, чем взаимное притяжение шаров, из которых состоит спутник, то система развалится. В предельном случае:

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{3GMm}{R_{min}^3}r$$

$$R_{min} = r\sqrt[3]{\frac{12M}{m}}$$

Критерий	Соотношение	Балл
Записано соотношение для центростремительного ускорения для центра масс спутника	$$\frac{2GmM}{R^2} = 2mw^2R$$	1 балл
Найдена циклическая частота вращения центра масс спутника	$$w^2 = \frac{GM}{R^3}$$	1 балл
Записано радиальное ускорение для одного из шаров спутника в общем виде	$$a(R+x) = \frac{GM}{R^3}(R+x) - \frac{GM}{(R+x)^2}$$	2 балла
Использование приближения из примечания	$$\frac{GM}{R^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^2} \approx \frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2x}{R}\right)$$	2 балла
Найдена дополнительная сила, действующая на шар из которого состоит спутник	$$F_a(R \pm r) = \pm\frac{3GMm}{R^3}r$$	2 балла
Записан предельный случай равенства сил для шаров из которых состоит спутник *При правильной записи этого пункта, но нахождения ускорения а не силы в предыдущем, за предыдущий пункт так же ставится полный балл*	$$\frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{3GMm}{R_{min}^3}r$$	1 балл
Получен ответ	$$R_{min} = r\sqrt[3]{\frac{12M}{m}}$$	1 балл

5. На схеме, представленной на рисунке справа изображена экспериментальная установка, состоящая из переключаемого источника постоянного напряжения, имеющего два режима (25 и 250 Вольт) и внутреннее сопротивление $\boldsymbol{r}$ = 250 мОм. К нему подключена газоразрядная лампа, чья ВАХ имеет вид $\boldsymbol{I} = 4\boldsymbol{U}^2$ и динистор D – полупроводниковый прибор с S-образной ВАХ ***(см. на обороте)***. При достижении напряжения отпирания, прибор переходит на другой режим, а значит, ВАХ "перескакивает" с нижней ветви на верхнюю. Исследователь настроил установку, включил и замерил ток через динистор. Внезапный звонок отвлек исследователя и, потянувшись за телефоном, он случайно переключил тумблер источника с 25 на 250 Вольт. Тут же осознав ошибку, он вернул положение тумблера в первоначальное состояние, но ток через динистор был уже совершенно другим. При этом схема корректно работала. Найдите силы токов через динистор, при которых были проведены данные "случайные опыты".



Возможное решение

Для удобства заменим источник напряжения на источник тока J=ε/r.
Тогда запишем уравнение на сумму токов, вытекающих из источника

$$J = \frac{U}{r} + 4U^2 + I_D$$

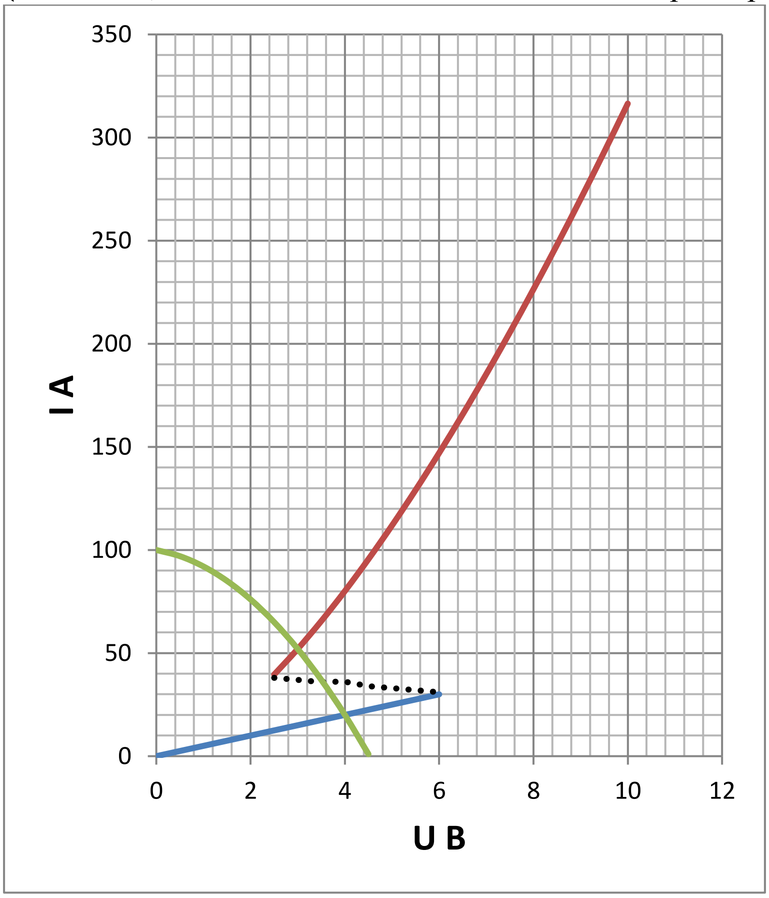
Где U – напряжение на лампе I_D – ток через динистор r – внутр. сопротивление источника
Отсюда получим уравнение нагрузочной кривой

$$I_d = \frac{\varepsilon}{r} - 4U^2 - \frac{U}{r}$$

Далее, по точкам построим эту кривую, и выделим два пересечения с ВАХ динистора

$$I_{d1} = 20\ A$$
$$I_{d2} = 52\ A$$

(Очевидно, что нестабильное состояние динистора не реализуется)



Критерий	**Соотношение**	**Балл**
Сумма токов, вытекающих из источника	$J = \frac{U}{r} + 4U^2 + I_D$	3 балл
Уравнение нагрузочной кривой	$I_d = \frac{\varepsilon}{r} - 4U^2 - \frac{U}{r}$	2 балл
Построение нагрузочной кривой		3 балла
Ответ	$I_{d1} = 20\ A$ $I_{d2} = 52\ A$	2 балл